第28講　式と証明(1)

例題28－1

(1)　$(2x-3y)^5$ を展開せよ．

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの x^7 の係数を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 28 ー 1

(1)　$(a-b)^6$ を展開せよ.

(2)　$(2x-7)^5$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 28 ー 2

(1)　x^3+2x-3 を x^2+2x-1 で割った商と余りを求めよ．

(2)　整式 P を x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ になった．このとき，整式 P を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 28 ー 2

(1)　$2x^3-5x^2+4x-1$ を x^2-x+1 で割った商と余りを求めよ．

(2)　整式 x^3-2x^2-4x+8 を整式 A で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ になった．このとき，整式 A を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 28 － 3

次の式を計算せよ.

(1) $\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+9}$　　(2) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 28 － 3

次の式を計算せよ.

(1) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x} \div \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$

(2) $\dfrac{3}{(x+1)(x-2)} + \dfrac{x-6}{(x-2)(x+2)}$

(3) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 28 − 4

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(1)　$x^2=a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 28 － 4

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　式と証明(1)

(1)　$(x+2y)^5$ の展開式で，x^3y^2 の項の係数は［アイ］である．

(2)　$6x^3+11x^2-2$ を整式 A で割ると，商が $2x^2+3x-1$ で余りが -1 である．このとき
$A=$［ウ］$x+$［エ］である．

(3)　等式 $x^3-3x^2+7=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ が x についての恒等式となるとき，$a=$［オ］，$b=$［カ］，$c=$［キ］，$d=$［ク］である．

(4)　等式 $\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}$ が x についての恒等式となるとき，
$a=$［ケ］，$b=$［コ］である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　式と証明(1)

例題28－1

(1)　$(2x-3y)^5$ を展開せよ.

(2)　$(3-x)^{10}$ を展開したときの x^7 の係数を求めよ.

(1)　$(2x-3y)^5={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4(-3y)$

$+{}_5C_2(2x)^3(-3y)^2+{}_5C_3(2x)^2(-3y)^3+{}_5C_4(2x)(-3y)^4+{}_5C_5(-3y)^5$

$=\mathbf{32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5}$

(2)　$(3-x)^{10}$ の展開式の一般項は

${}_{10}C_r3^{10-r}(-x)^r$

x^7 の項は $r=7$ のとき　　よって求める係数は　${}_{10}C_7 3^3\cdot(-1)^7=\mathbf{-3240}$

類題28－1

(1)　$(a-b)^6$ を展開せよ.

(2)　$(2x-7)^5$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ.

(1)　$(a-b)^6={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5(-b)+{}_6C_2a^4(-b)^2$

$+{}_6C_3a^3(-b)^3+{}_6C_4a^2(-b)^4+{}_6C_5a(-b)^5+{}_6C_6(-b)^6$

$=\mathbf{a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6}$

(2)　$(2x-7)^5$ の展開式の一般項は

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-7)^r={}_5C_r2^{5-r}(-7)^rx^{5-r}$

x^3 の項は $r=2$ のとき　　よって求める係数は　${}_5C_2 2^3(-7)^2=\mathbf{3920}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 28 − 2

(1)　x^3+2x-3 を x^2+2x-1 で割った商と余りを求めよ．

(2)　整式 P を x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ になった．このとき，整式 P を求めよ．

(1)

$$\begin{array}{rr} & x\ \ -2 \\ x^2+2x-1\,\big) & \overline{x^3\qquad\quad +2x-3} \\ & \underline{x^3+2x^2-\ \ x\qquad} \\ & -2x^2+3x-3 \\ & \underline{-2x^2-4x+2} \\ & 7x-5 \end{array}$$

よって　**商　$\boldsymbol{x-2}$　　余り　$\boldsymbol{7x-5}$**

(2)　$P=(x^2-2x-1)\times(2x-3)-2x=\boldsymbol{2x^3-7x^2+2x+3}$

類題 28 − 2

(1)　$2x^3-5x^2+4x-1$ を x^2-x+1 で割った商と余りを求めよ．

(2)　整式 x^3-2x^2-4x+8 を整式 A で割ると，商が $x+1$，余りが $-5x+4$ になった．このとき，整式 A を求めよ．

(1)

$$\begin{array}{rr} & 2x\ \ -3 \\ x^2-x+1\,\big) & \overline{2x^3-5x^2+4x-1} \\ & \underline{2x^3-2x^2+2x\qquad} \\ & -3x^2+2x-1 \\ & \underline{-3x^2+3x-3} \\ & -\ \ x+2 \end{array}$$

よって　**商　$\boldsymbol{2x-3}$　　余り　$\boldsymbol{-x+2}$**

(2)　$x^3-2x^2-4x+8=A\times(x+1)-5x+4$

$x^3-2x^2+x+4=A\times(x+1)$

よって x^3-2x^2+x+4 は $x+1$ で割り切れ，

その商が A である．

したがって　$\boldsymbol{A=x^2-3x+4}$

$$\begin{array}{rr} & x^2-3x\ \ +4 \\ x+1\,\big) & \overline{x^3-2x^2+\ \ x+4} \\ & \underline{x^3+\ \ x^2\qquad\qquad} \\ & -3x^2+\ \ x\qquad \\ & \underline{-3x^2-3x\qquad} \\ & 4x+4 \\ & \underline{4x+4} \\ & 0 \end{array}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 28 － 3

次の式を計算せよ.

(1) $\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+9}$　　(2) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

(3) $\dfrac{x+2}{x-\dfrac{2}{x+1}}$

(1) (与式)$=\dfrac{(x-3)(x-8)}{(x+2)(x-8)}\times\dfrac{x(x+2)}{(x-3)^2}=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-3}}$

(2) (与式)$=\dfrac{x(x+2)-2(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x^2-2}{(x+1)(x+2)}}$

(3) (与式)$=\dfrac{(x+2)\times(x+1)}{\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)\times(x+1)}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)-2}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x-1}}$

類題 28 － 3

次の式を計算せよ.

(1) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$　　(2) $\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{x-6}{(x-2)(x+2)}$

(3) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

(1) (与式)$=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x}\times\dfrac{x^2+2x}{x^2+5x+6}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x-1)}\times\dfrac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\boldsymbol{\dfrac{x-2}{x-1}}$

(2) (与式)$=\dfrac{3(x+2)+(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2-2x}{(x+1)(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}}$

(3) (与式)$=\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\times x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\boldsymbol{x+1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 28 ー 4

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(1)　$x^2=a(x+2)^2+b(x+3)^2+c(x+2)(x+3)$

(2)　$\dfrac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

(1)　(右辺)$=(a+b+c)x^2+(4a+6b+5c)x+4a+9b+6c$

x について左辺と係数比較して

$a+b+c=1$，$4a+6b+5c=0$，$4a+9b+6c=0$

これらより　$\boldsymbol{a=9}$，$\boldsymbol{b=4}$，$\boldsymbol{c=-12}$

(別解)　与えられた等式が恒等式となるとき

$x=-3$ を代入して　$a=9$

$x=-2$ を代入して　$b=4$

$x=-1$ を代入して　$a+4b+2c=1$

これらより　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

このとき　(右辺)$=9(x+2)^2+4(x+3)^2-12(x+2)(x+3)$

$=9x^2+36x+36+4x^2+24x+36-(12x^2+60x+72)=x^2$　より

与えられた等式は確かに恒等式となる．

したがって　$a=9$，$b=4$，$c=-12$

(2)　(右辺)$=\dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$

x について左辺と係数比較して

$2=a+b$，$-1=2a+b$

よって　$\boldsymbol{a=-3}$，$\boldsymbol{b=5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 28－4

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

(1)　$2x^2+3x-1=ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)$

(2)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

(1)　(右辺)$=(a+b+c)x^2+(a-b)x-c$

左辺と係数比較して　$a+b+c=2$，$a-b=3$，$-c=-1$

よって　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=1}$

(別解)　$x=0$，$x=1$，$x=-1$ を代入するとそれぞれ

$-c=-1$，$2a=4$，$2b=-2$　となる．

よって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

このとき　(右辺)$=2x(x+1)-x(x-1)+(x+1)(x-1)$

$=2x^2+2x-x^2+x+x^2-1$

$=2x^2+3x-1$

$=$(左辺)　より

与えられた等式は確かに恒等式となる．

したがって　$a=2$，$b=-1$，$c=1$

(2)　(右辺)$=\dfrac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c}{x^3-1}$

左辺と係数比較して　$a+b=0$，$a-b+c=0$，$a-c=3$

よって　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=-2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　式と証明(1)

(1)　$(x+2y)^5$ の展開式で，x^3y^2 の項の係数は **アイ** である．

(2)　$6x^3+11x^2-2$ を整式 A で割ると，商が $2x^2+3x-1$ で余りが -1 である．このとき $A=$ **ウ** $x+$ **エ** である．

(3)　等式 $x^3-3x^2+7=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$ が x についての恒等式となるとき，$a=$ **オ**，$b=$ **カ**，$c=$ **キ**，$d=$ **ク** である．

(4)　等式 $\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}$ が x についての恒等式となるとき，$a=$ **ケ**，$b=$ **コ** である．

解答例

(1)　$(x+2y)^5$ の展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(2y)^r={}_5\mathrm{C}_r 2^r x^{5-r}y^r$

x^3y^2 は $r=2$ のときの項で，その係数は　${}_5\mathrm{C}_2 2^2=\mathbf{40}$ である．

(2)　$6x^3+11x^2-2=A\times(2x^2+3x-1)-1$　と表される．

$6x^3+11x^2-1=A\times(2x^2+3x-1)$

よって　$6x^3+11x^2-1$ は $2x^2+3x-1$ で割り切れ，

その商が A である．　したがって　$A=\mathbf{3x+1}$

$$\begin{array}{r|l} & 3x+1 \\ \hline 2x^2+3x-1 & 6x^3+11x^2\qquad-1 \\ & 6x^3+9x^2-3x \\ \hline & \qquad 2x^2+3x-1 \\ & \qquad 2x^2+3x-1 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

(3)　$(\text{右辺})=a(x^3-6x^2+12x-8)+b(x^2-4x+4)+cx-2c+d$

$=ax^3+(-6a+b)x^2+(12a-4b+c)x+(-8a+4b-2c+d)$

左辺と係数比較して

$1=a$，$-3=-6a+b$，$0=12a-4b+c$，$7=-8a+4b-2c+d$

これらより　$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{3}$，$c=\mathbf{0}$，$d=\mathbf{3}$

(4)　$(\text{右辺})=\dfrac{a(x-1)+b(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{(a+b)x-a+2b}{(x+2)(x-1)}$

左辺と係数比較して　$5=a+b$，$1=-a+2b$

よって　$a=\mathbf{3}$，$b=\mathbf{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。